

© 2024 г. Ж.Т. ЖУСУБАЛИЕВ, д-р техн. наук (zhanybai@gmail.com)  
(Юго-Западный государственный университет, Курск),  
У.А. СОПУЕВ, канд. физ.-мат. наук (ulansoruev@mail.ru)  
(Ошский государственный университет, Кыргызстан),  
Д.А. БУШУЕВ, канд. техн. наук (untame@list.ru)  
(Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова)

## О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ<sup>1</sup>

Исследуется явление, связанное с захватом колебаний релейной системы внешним возбуждением (вынужденная синхронизация), которое проявляется в возникновении периодических движений, близких к «пачечной» ритмической активности нейронов, когда пакеты быстрых колебаний перемежаются с интервалами «молчания». Для изучения такого явления введено отображение окружности на себя, которое в зависимости от параметров может быть диффеоморфизмом или разрывным («gap map»). В обоих случаях отображение демонстрирует так называемую бифуркационную структуру «добавления периода» («period-adding»).

Выявлено, что число пачек на периоде периодического движения определяется его числом вращения, а длина интервалов между пачками – границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачке происходит через бифуркацию «граничного столкновения» («border collision»).

*Ключевые слова:* релейная система с гистерезисом и внешним периодическим возбуждением, система с двумя масштабами времени, разрывное отображение окружности, бифуркации граничного столкновения, бифуркация добавления периода.

DOI: 10.31857/S0005231024040052, EDN: ZGNQYR

### 1. Введение

Рассмотрим релейную систему с гистерезисом [1–3] и внешним периодическим возбуждением, состояние которой описывается дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad f(t, x) = \lambda(x - S(x, \eta) + \sigma(t)), \quad \sigma(t + \pi) = -\sigma(t),$$

<sup>1</sup> Жусубалиев Ж.Т. поддержан Минобрнауки РФ, программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (1.7.21/S-2; 1.71.23П). Сопуев У.А. поддержан грантом № 14-22 Ошского государственного университета. Работа Бушуева Д.А. выполнена в рамках реализации Федеральной программы поддержки университетов «Приоритет – 2030» с использованием оборудования на базе Центра высоких технологий БГТУ им. В.Г. Шухова

где  $t$  – время;  $x$  – неизвестная функция времени  $t$  из  $\mathbb{R}$  (выход системы);  $\dot{x}$  – производная  $x$  по  $t$ ;  $S$  – выходной сигнал релейного элемента;  $\lambda$  – величина обратно пропорциональная по модулю постоянной времени объекта;  $\sigma(t) = \mu_0 + \mu_m \cos t$  – вынуждающая сила, где  $\mu_0, \mu_m$  – постоянная составляющая и амплитуда переменной составляющей  $\sigma(t)$  соответственно.

Выходной сигнал  $S$  релейного элемента:

$$S(x, \eta) = \begin{cases} 1, & x < q - \chi, \quad \text{или} \quad q - \chi < x < q + \chi, \quad \text{и} \quad \eta = 1; \\ 0, & x > q + \chi, \quad \text{или} \quad q - \chi < x < q + \chi, \quad \text{и} \quad \eta = 0. \end{cases}$$

Здесь  $q$  – задающий сигнал;  $\chi$  – величина гистерезиса релейного элемента (РЭ);  $\eta = 0, +1$  – значения  $S$  после последнего переключения РЭ.

Как можно видеть из (1), правая часть содержит  $t$ , как и  $x$ . Функция  $f$  периодична по  $t$  с периодом  $2\pi$ . Кроме того, функция  $x(t)$ , удовлетворяющая (1), инвариантна по отношению к сдвигу начала координаты  $t$  на  $2\pi$  [4].

Параметры:  $\lambda = -7,5/\pi$ ,  $q = 4,0/\Gamma$ ;  $\mu_0 = 1,5/\Gamma$ ;  $\mu_m = 0,525/\Gamma$ ;  $\chi = \chi_0/\Gamma$ . В исследованиях варьировались  $\Gamma$  и  $\chi_0$ :  $6,0 \leq \Gamma \leq 7,0$ ,  $0,35 \leq \chi_0 \leq 0,65$ .

К уравнению вида (1) приводят многие задачи механики, физики [5–7], биологии и медицины.

Сюда относятся, например, математические модели для изучения атриоventрикулярной блокады Венкебаха в кардиологии [8–10], биологических механизмов регуляции сна и бодрствования [11–14], ритмической активности нейронов [15–21]. В [22] было показано, что при принятых идеализациях к уравнению (1) можно свести математическую модель вибрационной машины с дебалансным возбуждением колебаний и релейным управлением.

Рассматриваемый класс релейных систем относится к системам с двумя масштабами времени («systems with fast and slow dynamics», см., например, [23, 24]), поведение которых определяют две частоты: частота вынуждающей силы и высокочастотные осцилляции, порождаемые быстрыми переключениями релейного элемента. Такие системы демонстрируют феномен, близкий к «пачечной» ритмической активности нейронов, когда пакеты быстрых колебаний перемежаются с интервалами «молчания». Типичным примером модельного отображения, описывающего такое поведение нейронов, является разрывное отображение Рулькова Н. [17]. Бифукационные механизмы возникновения пачечных колебаний изучались многими авторами (см., например, [18–21, 25]).

В данной работе изучается захват колебаний релейной системы внешним периодическим возбуждением, который проявляется в возникновении регулярных движений, близких к «пачечной» ритмической динамике нейронов. Сначала сводится дифференциальное уравнение (1) к отображению окружности на себя. Показано, что в зависимости от параметров, такое отображение является диффеоморфизмом на окружности или разрывным. Получено аналитически уравнение для границ разрыва (многообразие переключения) и границ поглощающей области в фазовом пространстве. Определена грани-

ца, разделяющая пространство параметров на области существования разрывного отображения и диффеоморфизма на окружности. В обоих случаях отображение демонстрирует так называемую бифуркационную структуру добавления периода («period-adding») [26, 27].

В [22] было показано как численно, так и экспериментально, что интервалам молчания отвечают фазы низкочастотных колебаний, которые прерываются пачками быстрых осцилляций. В представленной работе выявлено, что в области параметров, где отображение разрывное, число пачек на периоде периодического движения определяется числом вращения, а длина интервалов между пачками – границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачке происходит через бифуркацию граничного столкновения, когда одна из периодических точек отображения сталкивается с многообразием переключения, что отвечает касанию решения (1) при  $S = 1$  верхнего порога переключения релейного элемента. Такую бифуркацию в негладких дифференциальных уравнениях называют «grazing bifurcation» («скользящая бифуркация») [28–31].

## 2. Математическая модель с дискретным временем

### 2.1. Отображение первого возвращения

В силу периодичности  $f$  по  $t$  с периодом  $2\pi$  фазовая плоскость (1) представляет собой прямоугольник шириной  $2\pi$  с отождествленными точками  $N'$ ,  $N$  (рис. 1,а). Уравнение (1) сводится к системе автономных дифференциальных уравнений

$$(2) \quad \dot{\theta} = 1, \quad \dot{x} = f(\theta, x),$$

фазовыми переменными которой являются  $\theta = t - 2\pi[t/(2\pi)]$  и  $x$ . Здесь  $[\cdot]$  – функция, выделяющая целую часть аргумента.

Решение уравнения (2) при  $S = 1$ , начинающееся в точке, принадлежащей нижнему порогу переключения релейного элемента  $q - \chi$ , достигает точки верхнего порога  $q + \chi$  спустя время  $z_k^+$ . Затем (после переключения релейного элемента  $S = 1 \rightarrow S = 0$ ) возвращается обратно в точку нижнего порога  $q - \chi$  через  $z_k^-$  (см. рис. 1,б).

Соединим концы отрезка  $[0; 2\pi]$  и образуем окружность единичного радиуса [1] (рис. 1,в). Тогда можно ввести отображение  $F$ , ставящее в соответствие каждой точке  $P_k$  на единичной окружности такую точку  $P_{k+1}$ , в которую перейдет  $P_k$  при повороте на угол  $\theta_{k+1}$  согласно дифференциальным уравнениям (2) спустя время  $z_k^+ + z_k^-$ , где  $z_k^\pm$  – ширина импульсов при  $S = 1$  и  $S = 0$  соответственно (рис. 1,б,в).

Тогда изменение угла между последовательными точками  $P_k = P(1, \theta_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  на единичной окружности описывается:

$$(3) \quad \theta \mapsto F(\theta) \bmod 2\pi, \quad F(\theta) = \theta + z^+(\theta) + z^-(\theta), \quad 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

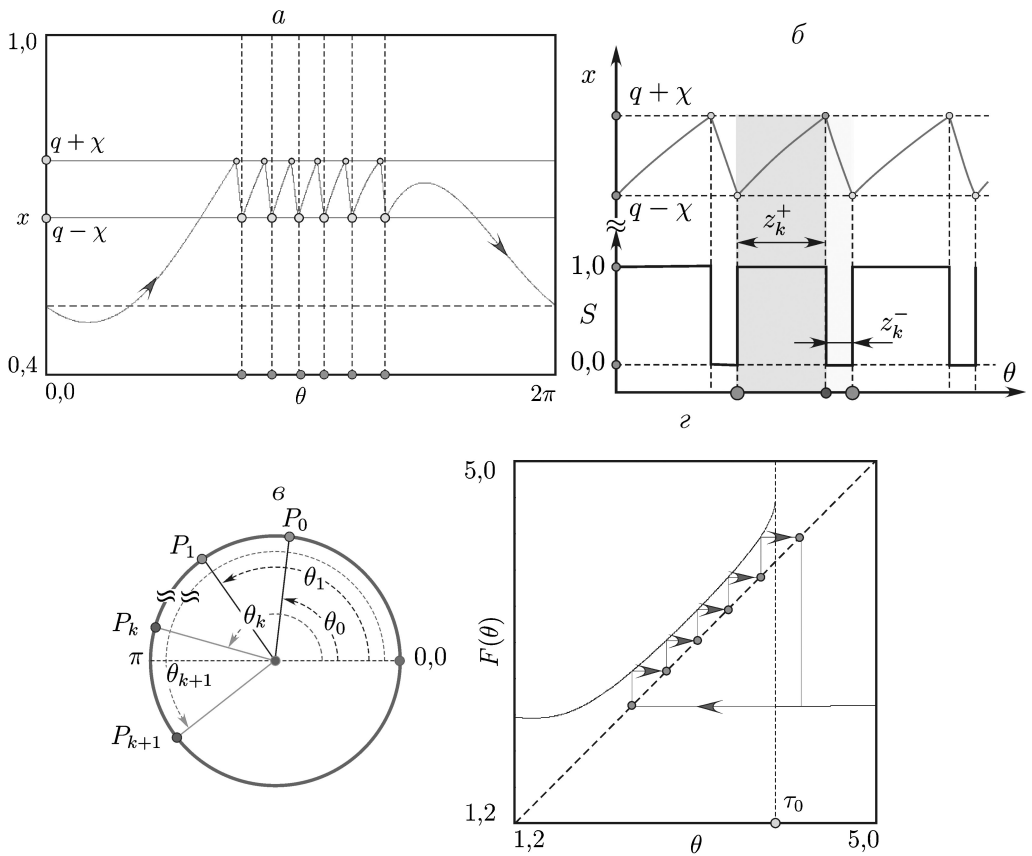


Рис. 1. *a* – Периодическое решение неавтономного уравнения (1). *б* – Увеличенный фрагмент решения на *a*, поясняющий технику получения отображения первого возвращения Пуанкаре. *в* – Отображение окружности на себя. *г* – Периодическая орбита отображения, соответствующая периодическому решению уравнения (1).

Здесь  $z^+$  – наименьшее неотрицательное решение уравнения

$$q + \chi = e^{\lambda z^+} (q - \chi - 1 + \mu_0) + 1 - \mu_0 + A_m (\sin(\theta + z^+) - \lambda \cos(\theta + z^+)) - A_m e^{\lambda z^+} (\sin \theta - \lambda \cos \theta),$$

а  $z^-$ :

$$q - \chi = e^{\lambda z^-} (q + \chi + \mu_0) - \mu_0 + A_m (\sin(\theta' + z^-) - \lambda \cos(\theta' + z^-)) - A_m e^{\lambda z^-} (\sin \theta' - \lambda \cos \theta'), \quad A_m = \frac{\lambda \mu_m}{1 + \lambda^2}, \quad \theta' = \theta + z^+.$$

Отсюда орбита точки  $\theta_0$  будет

$$\theta_1 = F(\theta_0), \theta_2 = F(\theta_1) = F^2(\theta_0), \dots, \theta_k = F^k(\theta_0), \dots$$

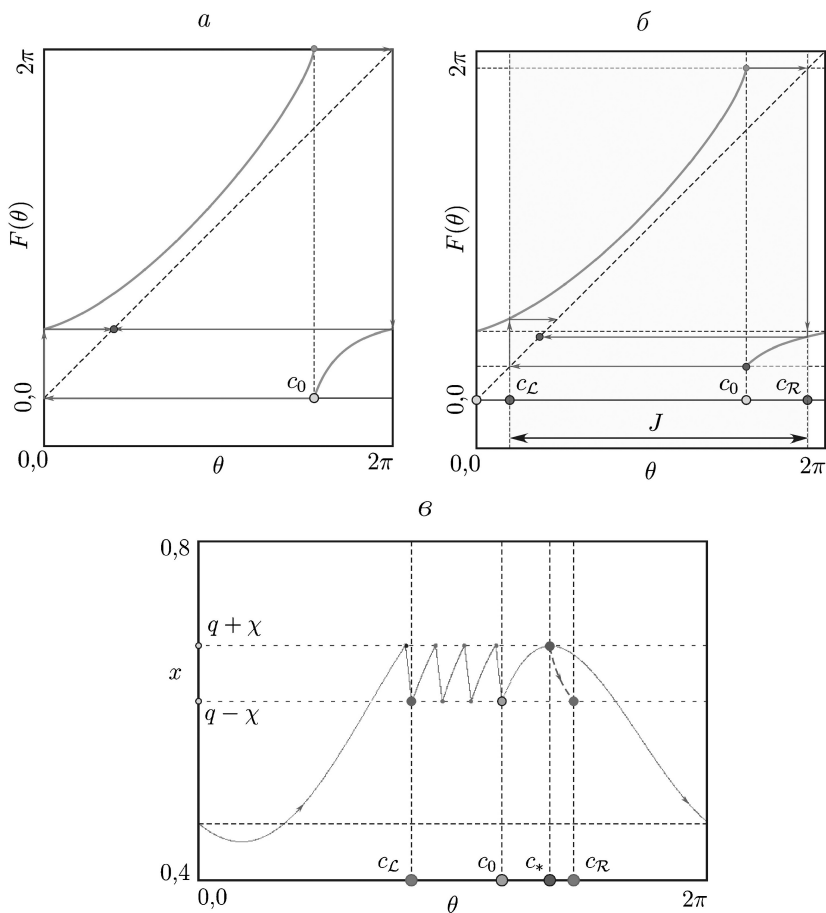


Рис. 2. *a* – Диффеоморфизм на окружности. *б* – Разрывное отображение («гар тар»). *в* – К определению точки разрыва  $F$  и границ поглощающей области  $J$ .

Характер движения на окружности определяется числом вращения

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^k(\theta) - \theta}{2\pi k}.$$

Если число вращения рациональное  $r = \frac{n}{m}$ , где  $n, m$  – целые числа, то существует  $\theta_0$  такое, что

$$F^m(\theta_0) = \theta_0 \pmod{2\pi}$$

и орбита на окружности является  $m$ -периодической.

Если же  $r$  – иррациональное число, то в случае диффеоморфизма движение квазипериодическое: каждая итерация отображения дает новую точку на единичной окружности и ни одна из этих точек не повторяется. Тогда  $P_k$  образуют плотное множество на окружности.

Это относилось к свойствам диффеоморфизмов. Если же отображение необратимое или разрывное, то указанные свойства сохраняются, но есть различия. Подробное обсуждение этих различий можно найти в [26].

Для описания орбиты начальной точки  $\theta_0$  системы (3), следуя [26], можно использовать два символа  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$  («left», «right»). Тогда орбита  $\mathcal{O}(\theta_0) = \{\theta_i = F^i(\theta_0), i = 0, 1, 2, \dots\}$  описывается последовательностью:

$$(4) \quad \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \cdots,$$

где символ  $\bar{\sigma}_i, i = 0, 1, 2, \dots$  в этой последовательности для каждого  $i \geq 0$  определяется как

$$\bar{\sigma}_i = \begin{cases} \mathcal{L}, & \theta_i < c_0; \\ \mathcal{R}, & \theta_i > c_0. \end{cases}$$

В одномерных отображениях с одной точкой разрыва число вращения  $r$  периодической орбиты периода  $m$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m(\theta) &= \{\theta \in I : \theta, F^k(\theta), k = 1, \dots, m-1\}, \\ F^m(\theta) &= \theta, F^k(\theta) \neq \theta \end{aligned}$$

находится как [26]

$$r = \frac{N_{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_m)}{N_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_m) + N_{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_m)},$$

где  $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_m), N_{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_m)$  – число символов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$  в (4).

## 2.2. Свойства отображения

- Перепишем отображение (3) в виде

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= F(\theta_k), \\ F(\theta) &= \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(\theta), & \theta < c_0; \\ F_{\mathcal{R}}(\theta), & \theta > c_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Функции  $F_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{R}}$  непрерывны и строго возрастают на отрезках  $[F_{\mathcal{R}}(c_0); c_0]$  и  $[c_0; F_{\mathcal{L}}(c_0)]$  соответственно. Отображение  $F$  не имеет неподвижных точек в  $(F_{\mathcal{R}}(c_0); F_{\mathcal{L}}(c_0))$ .

- Если

$$F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_0) < F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}}(c_0),$$

тогда каждая точка  $\theta \in J$  имеет либо единственный прообраз, либо не имеет прообразов внутри  $J$ .

Если существует непустой подинтервал  $(F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_0); F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}}(c_0))$ , состоящий из точек, не имеющих прообразов в  $J$ , то в этом случае говорят что  $F$  является разрывным («gar map»).

- На рис. 2,а изображен случай, когда  $F$  – функция непрерывная и монотонно возрастающая. Тогда  $F$  содержит одну фиктивную точку разрыва, такую, что

$$F_{\mathcal{R}}(c_0) = F_{\mathcal{L}}(c_0)$$

и  $F(\theta + 2\pi) = F(\theta) + 2\pi$ .

- На рис. 2,б показан случай, когда  $F$  содержит одну точку разрыва. Как возникает разрыв, поясняется далее. Более того, точки  $c_{\mathcal{L}} = F_{\mathcal{R}}(c_0)$  и  $c_{\mathcal{R}} = F_{\mathcal{L}}(c_0)$ , называемые критическими точками ранга один, определяют границы инвариантной поглощающей области  $J = [c_{\mathcal{L}}; c_{\mathcal{R}}]$ . Функция  $F$  может иметь локальные экстремумы, но они находятся вне  $J$ . Поэтому внутри  $J$  функция  $F$  является кусочно возрастающей. Более того, в этом случае  $F_{\mathcal{L}}(c_0) < F_{\mathcal{R}}(c_0)$ , так что в поглощающей области  $J$  отображение  $F$  является разрывным («гар шар»)(см. рис. 2,в).
- Условие, когда отображение  $F$  становится разрывным, формулируется утверждением 1.

*Утверждение 1. Разрыв  $F$  возникает, когда решение  $x(t)$  уравнения (1) при  $S = 1$ , начинающееся в точке нижнего порога  $q - \chi$  переключения релейного элемента, касается верхнего порога переключения  $q + \chi$ . В этом случае функция  $F$  имеет точку разрыва  $c_0$ , которая удовлетворяет уравнению*

$$(5) \quad F(c_0) = c_*,$$

где  $F(y) = y + z^+(y)$  [22, 27].

Легко видеть, что функция  $F$  в правой части уравнения (5) задана неявно. Цель состоит в том, чтобы получить уравнение относительно точки разрыва  $c_0$  в явном виде.

Условие касания  $x(t)$  верхнего порога переключения  $q + \chi$  релейного элемента записывается как

$$(6) \quad \varphi_t + \varphi_x \dot{x}(t)|_{t=c_*} = 0, \quad \varphi = q + \chi - x.$$

Так как  $\varphi_t = 0$  и  $\varphi_x = -1$ , то (6) эквивалентно

$$\dot{x}(t)|_{t=c_*} = 0, \quad \dot{x} = \lambda(x - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos t).$$

Отсюда

$$x(c_*) - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos c_* = 0.$$

Принимая во внимание, что  $x(c_*) = q + \chi$ , получим

$$q + \chi - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos c_* = 0.$$

Решив это уравнение относительно  $c_*$ , получим

$$c_* = 2\pi - \arccos\left(\frac{1 - q - \chi - \mu_0}{\mu_m}\right),$$

если  $-1 \leq \frac{1 - q - \chi - \mu_0}{\mu_m} \leq +1$ .

Из условия  $-1 \leq \frac{1 - q - \chi - \mu_0}{\mu_m} \leq +1$  находим границу  $L$ , разделяющую в пространстве параметров области существования разрывного отображения и диффеоморфизма. Обозначим эти области как  $\Pi_{\text{gap}}$  и  $\Pi_{\text{circle}}$ . Граница между  $\Pi_{\text{gap}}$  и  $\Pi_{\text{circle}}$  на плоскости варьируемых параметров  $(\chi_0, \Gamma)$  есть

$$(7) \quad L = \{(\chi_0, \Gamma) : \Gamma = 6,025 + \chi_0\}.$$

После того, как найдена  $c_*$ , определим точку разрыва  $c_0$ . Для получения уравнения относительно  $c_0$  в явном виде, используем условие касания

$$(8) \quad x(c_*) - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos c_* = 0.$$

Поскольку

$$(9) \quad \begin{aligned} x(c_*) &= e^{\lambda(c_* - c_0)}(q - \chi - 1 + \mu_0) + 1 - \mu_0 + \\ &+ A_m t(\sin c_* - \lambda \cos c_*) - A_m e^{\lambda(c_* - c_0)}(\sin c_0 - \lambda \cos c_0), \end{aligned}$$

то, подставив (9) в (8), получим:

$$\begin{aligned} e^{\lambda(c_* - c_0)}(q - \chi - 1 + \mu_0) + A_m(\sin c_* - \lambda \cos c_*) - \\ - A_m e^{\lambda(c_* - c_0)}(\sin c_0 - \lambda \cos c_0) + \mu_m \cos c_* = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение решается численно.

### 3. Бифуркационный анализ

На рис. 3,а изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма, рассчитанная численно на плоскости параметров  $(\chi_0, \Gamma)$ , на которую нанесена граница  $L$ . Выше этой границы расположена область  $\Pi_{\text{circle}}$ , где отображение (2) есть диффеоморфизм на окружности, а ниже – область  $\Pi_{\text{gap}}$  существования разрывного отображения («gap map»).

На рис. 3,б приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, а на рис. 3,в – увеличенный фрагмент этой диаграммы, показывающий переход к синхронизации 1:5 и выход из нее через седло-узловую бифуркацию в области  $\Pi_{\text{circle}}$ . Сплошные линии соответствуют устойчивому 5-циклу, а пунктирные – седловому 5-циклу. На границах резонансного языка 1:5 устойчивый и седловой 5-циклы сливаются и исчезают. Области синхронизации имеют классическую структуру так называемых языков Арнольда [8]. Между языками Арнольда находятся области квазипериодических режимов с иррациональными числами вращения.

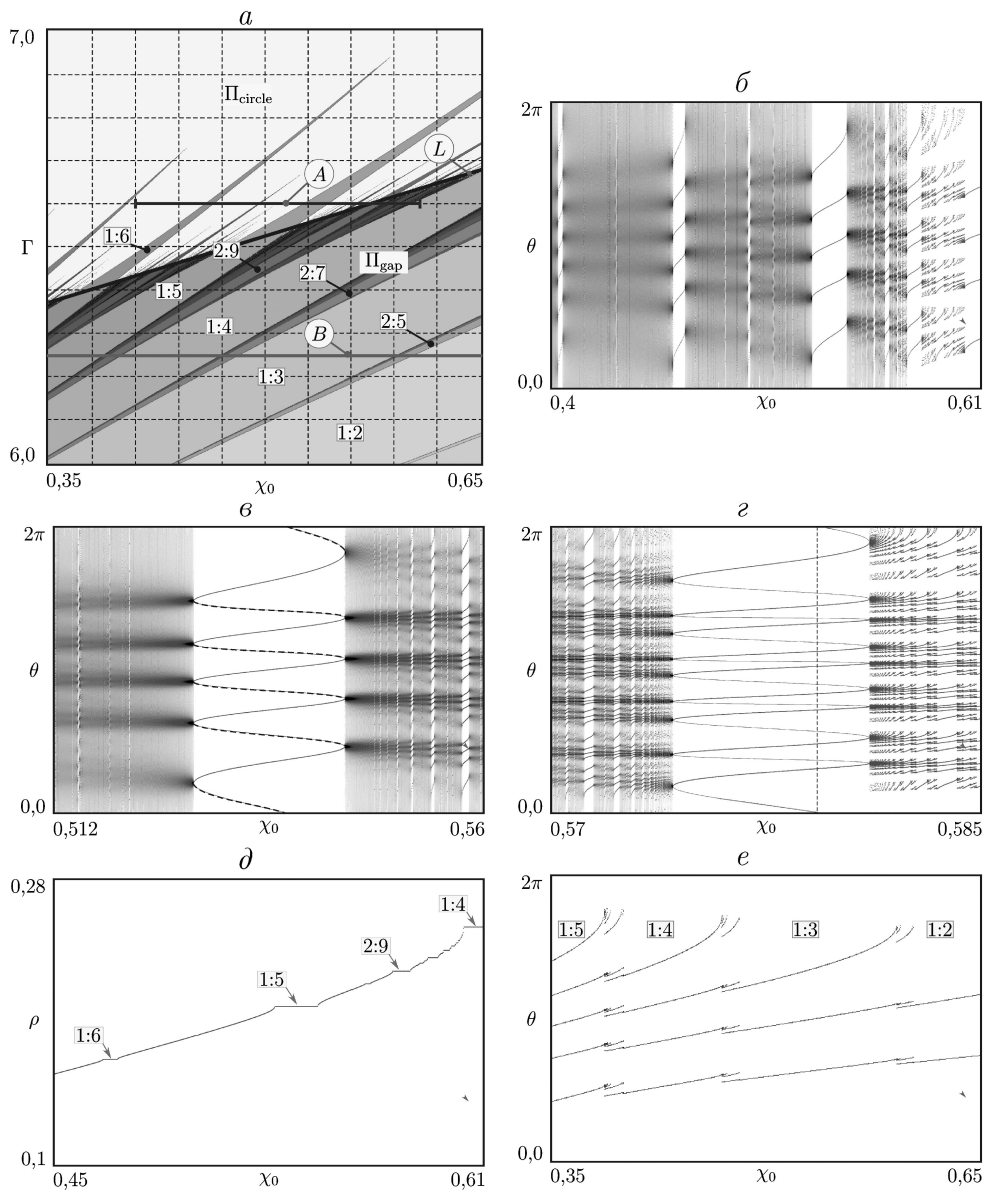


Рис. 3. *a* – Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $(\chi_0, \Gamma)$  отображения (3), на которую нанесена граница  $L$  (7). *б* – Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для сечения А:  $0,4 \leq \chi_0 \leq 0,61, \Gamma = 6,6$ . *в* – Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на *б* для окрестности резонанса  $1:5$  области  $\Pi_{\text{circle}}$ :  $(0,512 \leq \chi_0 \leq 0,56, \Gamma = 6,6)$ . Здесь пунктирные линии отвечают неустойчивому 5-циклу, а сплошные – устойчивому. *г* – Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на *б* для окрестности резонанса  $2:9$ , часть которой находится в области  $\Pi_{\text{circle}}$ , а часть – в  $\Pi_{\text{gap}}$  (сечение А):  $0,57 \leq \chi_0 \leq 0,585$  и  $\Gamma = 6,6$ . *д* – Чертова лестница: зависимость числа вращения  $r$  от  $\chi_0$ ,  $0,45 \leq \chi_0 \leq 0,61, \Gamma = 6,6$ . *е* – Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для области  $\Pi_{\text{gap}}$ , иллюстрирующая каскад бифуркаций добавления периода:  $0,35 \leq \chi_0 \leq 0,65, \Gamma = 6,25$ , (сечение В).

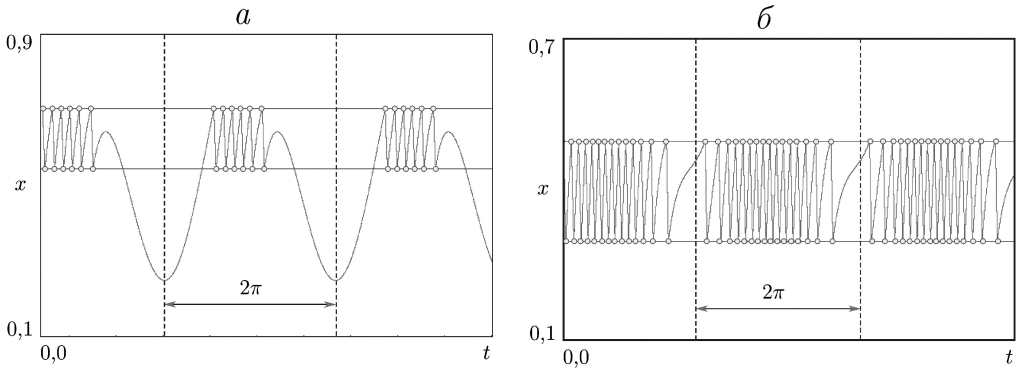


Рис. 4. *a* – Периодическое решение в области  $\Pi_{\text{gap}}$ . *б* – Периодическое решение в области  $\Pi_{\text{circle}}$ .

На рис. 3,г представлен увеличенный фрагмент диаграммы на рис. 3,б, иллюстрирующий бифуркационный переход, когда пересекается граница между областями  $\Pi_{\text{circle}}$  и  $\Pi_{\text{gap}}$ . Как можно видеть из этой диаграммы, вход в режим синхронизации порядка 2:9 происходит в  $\Pi_{\text{circle}}$ , а выход из нее – в области  $\Pi_{\text{gap}}$ . Исследования показали, что переход на границе языка 2:9 в  $\Pi_{\text{circle}}$  происходит через классическую седло-узловую бифуркацию, а на границе в области  $\Pi_{\text{gap}}$  – через седло-узловую бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold») [22].

На рис. 3,д показана так называемая «чертова лестница»: зависимость числа вращения от  $\chi_0$ . На этом рисунке выделены ступеньки, отвечающие резонансам 1:6, 1:5, 2:9 1:4.

На рис. 3,е приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, демонстрирующая каскад бифуркаций добавления периода в области  $\Pi_{\text{gap}}$ .

На рис. 4,а показано периодическое движение, иллюстрирующее пачечную динамику в области  $\Pi_{\text{gap}}$  для 1:6. Как можно видеть из этого рисунка, число пачек определяется числителем числа вращения. А интервал между пачками определяется границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачках происходит через бифуркацию граничного столкновения, когда одна из периодических точек попадает на границу разрыва  $F$ .

На рис. 4,б приведено периодическое решение в области  $\Pi_{\text{circle}}$ , где этот аттрактор локализован в зоне гистерезиса релейного элемента.

Изучение бифуркационных механизмов возникновения пачечных колебаний отображения (3) в области  $\Pi_{\text{circle}}$  – задача будущих исследований.

#### 4. Заключение

Статья посвящена обсуждению необычного явления, обнаруженного в релейной системе с гистерезисом и внешним периодическим возбуждением. Этот феномен связан с вынужденной синхронизацией релейных систем и проявляется в возникновении периодической динамики, близкой к «пачеч-

ной» ритмической активности нейронов, когда пакеты быстрых колебаний перемежаются с интервалами «молчания».

Приводится методика изучения такого явления с помощью отображения окружности на себя. В зависимости от параметров отображение может быть диффеоморфизмом или разрывным («*gap map*»). Показано, что в обоих случаях отображение демонстрирует так называемую бифуркационную структуру «добавления периода» («*period-adding*»).

Выявлено, что в области  $\Pi_{\text{gap}}$  число пачек на периоде периодического движения определяется его числом вращения, а длина интервалов между пачками – границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачке происходит через бифуркацию «граничного столкновения» («*border collision*»), которую в негладких дифференциальных уравнениях называют «скользящей бифуркацией» («*grazing bifurcation*»).

В силу того, что функция  $F$  кусочно-монотонно возрастающая с одной точкой разрыва  $c_0$  в  $J$  (см. рис. 2, *a, б*, доказательство приведено в [22]), языки Арнольда с числами вращения  $1:m$ ,  $m = 2, 3, \dots$  ( $m$  – период цикла) на плоскости параметров не пересекаются [7]. Области периодичности, отвечающие устойчивым  $m$ -циклам более высоких уровней сложности, расположенные между этими языками, также не пересекаются. Отображение (3) демонстрирует типичное явление добавления периода, и в одномерных отображениях рассматриваемого класса не может быть бистабильного поведения [7, 26, 32–34]. Однако, хорошо известно, что если, например слева от точки разрыва функция  $F$  возрастающая, а справа – убывающая, то возможна бистабильность [26]. В отображениях с перекрытиями («*overlapping maps*» [26]) динамика гораздо сложнее, связанная с мультистабильностью, как и в многомерных системах (см., например, [35–38] и цитируемую там литературу).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
2. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
3. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976.
4. *Hale J.K., Koçak H.* Dynamics and Bifurcations. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
5. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
7. *Arnold V.I.* Small denominators. I. Mappings of the circumference onto itself // Am. Math. Soc. Transl. Ser. II. 1965. Vol. 46. P. 213–284.
8. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // Chaos. 1991. Vol. 1. No. 1. P. 20–24.

9. *Glass L.* Cardiac arrhythmias and circle maps—A classical problem // *Chaos*. 1991. Vol. 1. No. 1. P. 13–19.
10. *Keener J.P.* On cardiac arrhythmias: AV conduction block // *J. Math. Biol.* 1981. Vol. 12. P. 215–225.
11. *Borbély A.A., Daan S., Wirz-Justice A., Deboer T.* The two-process model of sleep regulation: a reappraisal // *J. Sleep Res.* 2016. Vol. 25. P. 131–143.
12. *Bailey M.P., Derks G., Skeldon A.C.* Circle maps with gaps: Understanding the dynamics of the two-process model for sleep-wake regulation // *Eur. J. Appl. Math.* 2018. Vol. 29. P. 845–868.
13. *Derks G., Glendinning P.A., Skeldon A.C.* Creation of discontinuities in circle maps // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2021. Vol. 477. P. 20200872.
14. *Şaylı M., Skeldon A.C., Thul R., Nicks R., Coombes S.* The two-process model for sleep-wake regulation: A nonsmooth dynamics perspective // *Physica D*. 2023. Vol. 444. P. 133595.
15. *Bressloff P.C., Stark J.* Neuronal dynamics based on discontinuous circle maps // *Phys. Lett. A*. 1990. Vol. 150. No. 3,4. P. 187–195.
16. *Coombes S., Thul R., Wedgwood K.C.A.* Nonsmooth dynamics in spiking neuron // *Physica D*. 2012. Vol. 241. P. 2042–2057.
17. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Physical Review E*. 2002. Vol. 65. No. 4. P. 041922.
18. *Izhikevich E.M.* *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2007.
19. *Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2018. Т. 26. № 4–5. С. 5–58.
20. *Shilnikov A.L., Rulkov N.F.* Subthreshold oscillations in a map-based neuron model // *Phys. Lett. A*. 2004. Vol. 328. P. 177–184.
21. *Courbage M., Nekorkin V.I., Vdovin L.V.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // *Chaos*. 2007. Vol. 17. No. 4. P. 043109.
22. *Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Rubanov V.G., Bushuev D.A.* Complex dynamics of a vibration machine caused by a relay feedback control // *Physica D*. 2021. Vol. 420. P. 32870.
23. *Bi Q.S., Chen X.K., Kurths J., Zhang Zh.* Nonlinear behaviors as well as the mechanism in a piecewise-linear dynamical system with two time scales // *Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 85. P. 2233–2245.
24. *Bi Q.S., Zhang Zh.* Bursting phenomena as well as the bifurcation mechanism in controlled Lorenz oscillator with two time scales // *Phys. Lett. A*. 2011. Vol. 375. P. 1183–1190.
25. *Turaev D.V., Shilnikov L.P.* Blue sky catastrophes // *Dokl. Math.* 1995. No. 51. P. 404–407.
26. *Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F.* *Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures*. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2019.

27. *Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Kucherov A.S., Haroun R., El Aroudi A.* Period adding with symmetry breaking/recovering in a power inverter with hysteresis control // *Physica D.* 2023. Vol. 444. P. 133600.
28. *Nordmark A.* Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator // *J. Sound Vibrat.* 1991. Vol. 145. No. 2. P. 279–297.
29. *Chin W., Ott E., Nusse H. E., Grebogi C.* Grazing bifurcations in impact oscillators // *Physical Review E.* 1994. Vol. 50. No. 6. P. 4427–4444.
30. *Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E.* Local Analysis of C-bifurcations in  $n$ -Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1999. Vol. 19. No. 11. P. 1881–1908.
31. *Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P.* Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008.
32. *Keener J.P.* Chaotic behavior in piecewise continuous difference equations // *Trans. Am. Math. Soc.* 1980. Vol. 261. No. 2. P. 589–604.
33. *Kaneko K.* On the period-adding phenomena at the frequency locking in a one-dimensional mapping // *Prog. Theor. Phys.* 1982. Vol. 68. No. 2. P. 669–672.
34. De Melo W., Van Strien S. *One-Dimensional Dynamics.* New York: Springer, 1993.
35. *Dudkowski D., Czolczyński K., Kapitaniak T.* Multistability and synchronization: The co-existence of synchronous patterns in coupled pendula // *Mechanical Systems and Signal Processing.* 2022. Vol. 16. P. 108446.
36. *Zhen Su Zh., Kurths J., Liu Y., Yanchuk S.* Extreme multistability in symmetrically coupled clocks // *Chaos.* 2023. Vol. 33. P. 083157.
37. *Kuznetsov N., Mokaev T., Ponomarenko V., Seleznev E., Stankevich N., Chua L.* Hidden attractors in Chua circuit: mathematical theory meets physical experiments // *Nonlinear Dynamics.* 2023. Vol. 111. P. 5859–5887.
38. *Zhusubalyev Zh.T., Mosekilde E.* Multistability and hidden attractors in a multilevel DC/DC converter // *Math. Comput. Simulat.* 2015. Vol. 109. P. 32–45.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 22.06.2023

После доработки 26.02.2024

Принята к публикации 04.03.2024